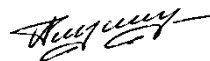


МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
уравнений в частных производных  
и теории вероятностей



А.В. Глушко

25.05.2023

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б.О.21 Теория случайных процессов**

1. Код и наименование специальности: 01.05.01 Фундаментальная математика и механика
2. Профиль специализации Современные методы теории функций в математике и механике
3. Квалификация выпускника: Математик. Механик. Преподаватель
4. Форма обучения: Очная
5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета
6. Составители программы: доц., к.ф.-м.н. Райхельгауз Л.Б.
7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета  
Протокол № 0500-06 от 25.05.2023
8. Учебный год: 2025/2026 Семестр(ы): 6

### 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели изучения дисциплины:

- ознакомление слушателей со стохастическим подходом описания обширного класса реальных физических процессов, не укладывающихся в рамки детерминированных конструкций
- применение методов и теоретической базы, необходимыми для осуществления прогнозов в области случайных явлений

Задачи учебной дисциплины:

- использование полученного теоретического материала для описания и изучения реальных физических процессов и явлений
- владение основами создания математических моделей (т.е. описанием явлений при помощи набора строго определенных символов и операций над ними)

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:** Учебная дисциплина «Теория случайных процессов» относится к Блоку Обязательной части, т.е. является обязательной дисциплиной для изучения обучающимися. Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим (а также параллельно изучаемым) дисциплинам: математический анализ, комплексный анализ, функциональный анализ, теория вероятностей, алгебра, дифференциальные уравнения и др. Приступая к изучению данной дисциплины, студент должен иметь теоретическую и практическую подготовку по алгебре и началам анализа, по геометрии, т.е. владеть математическими знаниями, умениями и навыками, полученными в общеобразовательных учреждениях; кроме того необходимы глубокие знания в одном из фундаментальных разделов математики – математическом анализе.

### 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать как использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук.  Уметь использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук.
		ОПК-1.2	Умеет использовать их в области математических и (или) есте-	Знать как использовать базовые знания, полученные в области ма-

	гии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности		ственных наук в профессиональной деятельности.	тематических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности  Уметь использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности  Владеть методами использования базовых знаний, полученных в области математических и (или) естественных наук в профессиональной деятельности
		ОПК-1.3.	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать, как использовать методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний  Уметь: работать с различными источниками научной информации, грамотно и правильно представлять свои результаты  Владеть методами решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах (в соответствии с учебным планом) — 2 /72.**

**Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) 6 семестр – зачет.**

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			6 семестр
Контактная работа		32	32
в том числе:	лекции	16	16
	практические	16	16
	лабораторные	-	-
	курсовая работа	-	-

	контрольные работы	1	1
Самостоятельная работа		40	40
Промежуточная аттестация		зачет	-
Итого:		<b>72</b>	<b>72</b>

### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
<b>1. Лекции</b>			
1.1.	Случайный процесс. Классификация случайных процессов	Теорема Колмогорова (о конечномерных распределениях случайного процесса). Семейство конечномерных распределений случайного процесса. Математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса. Теорема Колмогорова (о конечномерных распределениях случайного процесса) Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов. Гауссовские случайные процессы: определение, свойства, винеровский случайный процесс. Выборочное пространство случайного процесса.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6499">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6499</a>
1.2.	Элементы стохастического анализа	Непрерывность случайного процесса. Дифференцирование случайного процесса. Стохастический интеграл ИТО. Формула ИТО. Стохастические дифференциальные уравнения. Интегрирование случайного процесса Стохастические модели финансовой математики	
1.3.	Марковские процессы	Однородные марковские процессы. Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем. Однородные марковские процессы Процессы рождения и гибели: определение, дифференциальные уравнения Колмогорова, связь с теорией массового обслуживания	
1.4.	Ветвящиеся процессы	Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Вероятность вырождения	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1.	Случайный процесс. Классификация случайных процессов	Выборочное пространство случайного процесса. Теорема Колмогорова (о конечномерных распределениях случайного процесса). Определение случайного процесса. Семейство конечномерных распределений случайного процесса. Математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса. Классификация случайных процессов. Гауссовские случайные процессы: определение, свойства. Классификация случайных процессов. Винеровские случайные процессы: определение, свойства.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6499">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=6499</a>
2.2.	Элементы стохастического анализа	Интегрирование случайного процесса Непрерывность случайного процесса. Дифференцирование случайного процесса. Стохастический интеграл ИТО. Формула ИТО. Стохастические дифференциальные уравнения.	

		Стохастические модели финансовой математики Контрольная работа	
2.3.	Марковские процессы	Марковские процессы с дискретным временем. Марковские процессы с непрерывным временем. Однородные марковские процессы Процессы рождения и гибели: определение, дифференциальные уравнения Колмогорова, связь с теорией массового обслуживания	
2.4.	Ветвящиеся процессы	Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Вероятность вырождения	
<b>3. Самостоятельная работа</b>			
3.1.	Случайный процесс. Классификация случайных процессов	Определение случайного процесса. Семейство конечномерных распределений случайного процесса. Математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса. Выборочное пространство случайного процесса. Теорема Колмогорова (о конечномерных распределениях случайного процесса) Классификация случайных процессов. Гауссовские случайные процессы: определение, свойства, винеровский случайный процесс	
3.2.	Элементы стохастического анализа	Непрерывность случайного процесса. Дифференцирование случайного процесса. Интегрирование случайного процесса Стохастический интеграл ИТО. Формула ИТО. Стохастические дифференциальные уравнения. Стохастические модели финансовой математики	
3.3.	Марковские процессы	Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем. Однородные марковские процессы Процессы рождения и гибели: определение, дифференциальные уравнения Колмогорова, связь с теорией массового обслуживания	
3.4.	Ветвящиеся процессы	Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Вероятность вырождения	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Случайный процесс. Классификация случайных процессов	4	4	-	6	14
2	Элементы стохастического анализа	6	6	-	16	28
3	Марковские процессы	4	4	-	8	16
4	Ветвящиеся процессы	2	2	-	10	14
	Итого:	16	16	-	40	72

## 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекции и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Теория случайных процессов» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.

2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после чего приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникнут вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутственный час преподавателю.

3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.

3. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

Освоение дисциплины предполагает не только обязательное посещение обучающимся аудиторных занятий (лекций и практических занятий) и активную работу на них, но и самостоятельную учебную деятельность в семестрах, на которую отводится 40 часов.

Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине «Теория случайных процессов» предполагает изучение рекомендуемой преподавателем литературы по вопросам лекционных и практических занятий (приведены выше), самостоятельное освоение понятийного аппарата и подготовку к текущим аттестациям (коллоквиумам и выполнению практических заданий) (примеры см. ниже).

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. При подготовке к лекционным и практическим занятиям обучающимся важно помнить, что их задача, отвечая на основные вопросы плана занятия и дополнительные вопросы преподавателя, показать свои знания и кругозор, умение логически построить ответ, владение математическим аппаратом и иные коммуникативные навыки, умение отстаивать свою профессиональную позицию. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям (6 семестр – зачет)

Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольной работы и практических заданий) подлежат последующей проверке преподавателем.

давателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации (6 семестр – зачет).

**15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины** (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
01	<b>Буре, В. М.</b> Теория вероятностей и математическая статистика : / Буре В. М., Парилина Е. М. — Москва : Лань, 2013. — Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по направлениям ВПО 010400 — «Прикладная математика и информатика» и 010300 — «Фундаментальная информатика и информационные технологии» .— ISBN 978-5-8114-1508-3 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=10249">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=10249</a> >.
02	<b>Миносцев, В. Б.</b> Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 4. Теория вероятностей и математическая статистика : / Миносцев В.Б., Пушкарёв Е.А., Берков Н.А., Мартыненко А.И. — Москва : Лань, 2013. — Допущено НМС по математике Министерства образования и науки РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по инженерно-техническим специальностям .— ISBN 978-5-8114-1561-8 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=32817">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=32817</a> >.
03	<b>Горлач, Б. А.</b> Теория вероятностей и математическая статистика : / Горлач Б.А. — Москва : Лань, 2013 .— ISBN 978-5-8114-1429-1 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=4864">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=4864</a> >.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
06	<b>Боровков Александр Алексеевич.</b> Математическая статистика [Текст] : учеб. / А. А. Боровков .— Москва : Лань, 2010. — 704 с. — (Лучшие классические учебники) .— .— ISBN 978-5-8114-1013-2 : 669.90 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=3810">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=3810</a> >.
07	<b>Туганбаев, Аскар Аканович.</b> Теория вероятностей и математическая статистика : / А. А. Туганбаев, В. Г. Крупин .— Москва : Лань, 2011. — 223 с. : ил. ; 21 .— (Учебники для вузов, Специальная литература) .— .— Библиогр.: с. 221 (9 назв.) .— ISBN 978-5-8114-1079-8 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=652">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=652</a> >.
08	<b>Флегель, Александр Валерьевич.</b> Пособие по решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Электронный ресурс] : [учебное пособие] : [для студ. 2 к. днев. отд-ния фак. компьютер. наук направлений: 09.03.02 -Информ. системы и технологии; 09.03.03 - Приклад. информатика; 09.03.04 - Программная инженерия; 02.03.01 - Математика и компьютер. науки]. Ч. 1. Теория вероятностей / А.В. Флегель, Е.А. Сирота, А.Ф. Клиньских ; Воронеж. гос. ун-т ; Воронеж. гос. ун-т .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. — Загл. с титула экрана .— Электрон. версия печ. публикации .— Свободный доступ из интранета ВГУ .— Текстовый файл .— Windows 2000; Adobe Acrobat Reader .— <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-204.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m15-204.pdf</a> >.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Источник
1	Полнотекстовая база «Университетская библиотека» – образовательный ресурс. – <UPL: <a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a> >.

2	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – ( <a href="http://www.lib.vsu.ru/">http // www.lib.vsu.ru/</a> ).
---	--

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
01	<b>Буре, В. М.</b> Теория вероятностей и математическая статистика : / Буре В. М., Парилина Е. М. — Москва : Лань, 2013 .— Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по направлениям ВПО 010400 — «Прикладная математика и информатика» и 010300 — «Фундаментальная информатика и информационные технологии» .— ISBN 978-5-8114-1508-3 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=10249">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=10249</a> >.
02	<b>Миносцев, В. Б.</b> Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 4. Теория вероятностей и математическая статистика : / Миносцев В.Б., Пушкарь Е.А., Берков Н.А., Мартыненко А.И. — Москва : Лань", 2013 .— Допущено НМС по математике Министерства образования и науки РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по инженерно-техническим специальностям .— ISBN 978-5-8114-1561-8 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=32817">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=32817</a> >.
03	<b>Горлач, Б. А.</b> Теория вероятностей и математическая статистика : / Горлач Б.А. — Москва : Лань, 2013 .— ISBN 978-5-8114-1429-1 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=4864">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&amp;pl1_id=4864</a> >.
04	<b>Баркова Л.Н.</b> Теория случайных процессов : учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. Гос. Ун-т; сост.: Л.Н. Баркова, И.В. Михайлова .— Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2008 .— 14 с. — Библиогр.: с.13 .— <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m08-220.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m08-220.pdf</a> >.

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (<https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=3460>). Перечень необходимого программного обеспечения: операционная система Windows или Linex, Microsoft, Windows Office, LibreOffice 5, *Calc*, *Math*, браузер Mozilla Firefox, Opera или Internet.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Учебная аудитория со специализированной мебелью для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I)

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства



1	Случайный процесс. Классификация случайных процессов	ОПК-1	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3	Контрольная работа, контрольно-измерительные материалы к зачету
2	Элементы стохастического анализа	ОПК-1	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3	Контрольная работа, контрольно-измерительные материалы к зачету
3	Марковские процессы	ОПК-1	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3	Контрольная работа, контрольно-измерительные материалы к зачету
4	Ветвящиеся процессы	ОПК-1	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3	Контрольная работа, контрольно-измерительные материалы к зачету
Промежуточная аттестация Форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

#### Примерный перечень задач для контрольной работы

1. Найти характеристики случайного процесса

$$\xi_t(\omega) = t^2 \xi_1 + t \xi_2 + 3,$$

если

$\xi_1, \xi_2$  - случайные величины с

$$M \xi_1 = 2, D \xi_1 = 3, M \xi_2 = 1, D \xi_2 = 3, \rho(\xi_1, \xi_2) = -0,3.$$

- 2 Доказать неотрицательную определенность функции

$$B(t, s) = \min(t, s), t, s > 0.$$

3.  $\{\xi(t) = \xi + t\}_{t \geq 0}$  — случайный процесс, где  $\xi \sim N(0, 1)$ . Найти  $M\left(\int_1^3 \xi(t) dt\right)$ .

4. Найти характеристики случайного процесса

$$\xi_t(\omega) = t^3 \xi_1 - 2t \xi_2 - t^2, \text{ если}$$

$\xi_1, \xi_2$  случайные величины с

$$M \xi_1 = 1, D \xi_1 = 3, M \xi_2 = 2, D \xi_2 = 1, \rho(\xi_1, \xi_2) = 0, t > 0.$$

5. Доказать неотрицательную определенность функции

$$B(t, s) = \min(t, s) - ts, t, s \in [0, 1].$$

6.  $\{\xi(t) = \lambda \sin(t + \varphi)\}_{t \geq 0}$  - случайный процесс, где  $\lambda = const, \varphi \sim R[0, 2\pi]$ . Найти  $M(\dot{\xi}(t))$ .

#### Примерный перечень задач для самостоятельной работы

1. Пусть  $G$  – случайный опыт, который может закончиться одним из двух возможных исходов  $\omega=1$  или  $\omega=2$ . Считая исходы равновероятными рассмотреть случайный процесс  $\{\xi_t(\omega) = \omega \cdot t, \omega \in \Omega = \{1,2\}\}_{t \in [0,1]}$ , наблюдаемый в данном опыте  $G$ .

2. Случайный опыт  $G$  – выбор наудачу точки из отрезка  $[0,1]$  (геометрическая схема). Рассмотреть случайный процесс  $\{\xi_t(\omega) = I_{\{\omega > t\}}(\omega), \omega \in \Omega = [0,1]\}_{t \in [0,1]}$ , наблюдаемый в данном опыте  $G$ .

3. Пусть  $\eta$  – случайная величина, функция распределения которой  $F(x)$ ,  $x \in R$ . Рассмотреть случайный процесс  $\{\xi_t = \eta + t\}_{t \in R}$ , считая что  $D\eta$  существует.

4. Пусть  $\eta, \zeta$  – независимые  $N(0,1/2)$  случайные величины. Рассмотреть случайный процесс  $\left\{ \xi_t = \frac{1}{t}(\eta + \zeta) \right\}_{t \in R_+}$ .

5. Пусть  $\eta, \zeta$  – случайные величины, которые имеют вторые моменты, причем  $\eta$  – имеет симметричное относительно нуля распределение и  $P\{\eta=0\} = 0$ . Рассмотреть случайный процесс  $\{\xi_t = \zeta + t(\eta + t)\}_{t \geq 0}$ . Найти также вероятность того, что реализации случайного процесса возрастают.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, контрольные работы.

Задание для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены *на оценивание*:

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;

2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.

3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

**Текущий контроль** предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучающихся и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольной ра-

боты, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях. При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «незачтено».

### **Описание технологии проведения**

Контрольные работы проводятся письменно.

### **Требование к выполнению заданий**

#### Контрольная работа

За контрольную работу ставится оценка «зачтено», в случае, если обучающийся выполнил:

- правильно в полном объеме все задания контрольной работы, показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающийся выполнил все задания с небольшими неточностями и показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающий выполнил половину из предложенных заданий правильно, остальные с существенными неточностями и показал удовлетворительное владение навыками полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала.

В остальных случаях обучающемуся ставится за контрольную работу «незачтено».

Если текущая аттестация проводится в дистанционном формате, то обучающийся должен иметь компьютер и доступ в систему «Электронный университет». Если у обучающегося отсутствует необходимое оборудование или доступ в систему, то он обязан сообщить преподавателю об этом за 2 рабочих дня. На контрольную работу в дистанционном режиме отводится ограничение по времени 240 минут.

## **20.2 Промежуточная аттестация**

**Промежуточная аттестация** предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Теория случайных процессов» проводится в форме зачета.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций. На зачете оценивается уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено», «незачтено».

## Описание технологии проведения

На зачете студент вытягивает билет, который содержит один теоретический и один практический. Все вопросы и задачи, входящие в билеты, охватывают весь материал, изучаемый за весь семестр.

### Примерный перечень заданий для промежуточной аттестации

1. При каком значении  $c$  матрица

$$P = \begin{pmatrix} c & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,9 \end{pmatrix} \text{ будет матрицей вероятностей перехода}$$

Цепи Маркова?

2. Найти вероятность вырождения для процесса с производящей функцией

$$f(s) = \frac{1 + s + s^2 + s^3}{4}.$$

3. При каком значении  $c$  матрица

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & c & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix} \text{ будет матрицей вероятностей перехода}$$

Цепи Маркова?

4. Найти вероятность вырождения для процесса с производящей функцией

$$f(s) = \frac{1-p}{1-ps}.$$

5. При каком значении  $c$  матрица

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & c & 0,5 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ будет матрицей вероятностей перехода}$$

Цепи Маркова?

6. Найти вероятность вырождения для процесса с производящей функцией

$$f(s) = 0,25s + 0,75.$$

### Требование к выполнению заданий

Критерии выставления оценок:

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если верно дан ответ хотя бы на один вопрос;
- оценка «не зачтено» в противном случае

20.3 Фонд оценочных средств форсированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ.

**ОПК-1.** Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно) Test1-5:

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

### !Task1

Найти математическое ожидание случайного процесса

$$\xi_t(\omega) = \xi_1 - 2t\xi_2 + t^2, \text{ если}$$

$\xi_1, \xi_2$  стохастически независимые случайные величины с известными числовыми характеристиками

$$M\xi_1 = 1, D\xi_1 = 3, M\xi_2 = 2, D\xi_2 = 1.$$

Варианты ответа:

1.  $M\xi_t(\omega) = 1 - 4t + t^2.$

2.  $M\xi_t(\omega) = t + t^2.$

3.  $M\xi_t(\omega) = 1 + t^2.$

**РЕШЕНИЕ.** Математическое ожидание случайного процесса находится как математическое ожидание случайной величины

$$M\xi_t(\omega) = M(\xi_1 - 2t\xi_2 + t^2) = M\xi_1 - 2tM\xi_2 + t^2 = 1 - 2t \cdot 2 + t^2 = 1 - 4t + t^2.$$

Ответ.  $M\xi_t(\omega) = 1 - 4t + t^2.$

### !Task2

Найти математическое ожидание случайного процесса

$$\xi_t(\omega) = -t\xi_1 + 2\xi_2 + t^2, \text{ если}$$

$\xi_1, \xi_2$  - стохастически независимые случайные величины с известными числовыми характеристиками

$$M\xi_1 = -2, D\xi_1 = 1, M\xi_2 = 3, D\xi_2 = 2.$$

Варианты ответа:

1.  $M\xi_t(\omega) = 2t + 6 + t^2.$

2.  $M\xi_t(\omega) = 6 + t^2.$

3.  $M\xi_t(\omega) = 2t + 1.$

**РЕШЕНИЕ.** Математическое ожидание случайного процесса находится как математическое ожидание случайной величины

$$M\xi_t(\omega) = M(-t\xi_1 + 2\xi_2 + t^2) = -tM\xi_1 + 2M\xi_2 + t^2 = -t \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + t^2 = 2t + 6 + t^2.$$

Ответ.  $M\xi_t(\omega) = 2t + 6 + t^2.$

### !Task3

Найти математическое ожидание случайного процесса

$$\xi_t(\omega) = t\xi_1 - 2t^2\xi_2 + t, \text{ если}$$

$\xi_1, \xi_2$  - стохастически независимые случайные величины с известными числовыми характеристиками  
случайные величины с

$$M\xi_1 = -1, D\xi_1 = 1, M\xi_2 = 2, D\xi_2 = 1, t > 0.$$

Варианты ответа:

1.  $M\xi_t(\omega) = -4t^2.$

2.  $M\xi_t(\omega) = t^2.$

3.  $M\xi_t(\omega) = -4t^2 + t + 1.$

**РЕШЕНИЕ.** Математическое ожидание случайного процесса находится как математическое ожидание случайной величины

$$M\xi_t(\omega) = M(t\xi_1 - 2t^2\xi_2 + t) = tM\xi_1 - 2t^2M\xi_2 + t = t \cdot (-1) - 2t^2 \cdot 2 + t = -4t^2.$$

Ответ.  $M\xi_t(\omega) = -4t^2.$

**!Task4**

Найти математическое ожидание случайного процесса

$$\xi_t(\omega) = t\xi_1 - 4t^2\xi_2 + 2t, \text{ если}$$

$\xi_1, \xi_2$  - стохастически независимые случайные величины с известными числовыми характеристиками

$$M\xi_1 = 4, D\xi_1 = 2, M\xi_2 = 1, D\xi_2 = 2, t > 0.$$

Варианты ответа:

$$1. M\xi_t(\omega) = 6t - 4t^2.$$

$$2. M\xi_t(\omega) = t - t^2.$$

$$3. M\xi_t(\omega) = 6t.$$

**РЕШЕНИЕ.** Математическое ожидание случайного процесса находится как математическое ожидание случайной величины

$$M\xi_t(\omega) = M(t\xi_1 - 4t^2\xi_2 + 2t) = tM\xi_1 - 4t^2M\xi_2 + 2t = t \cdot 4 - 4t^2 \cdot 1 + 2t = 6t - 4t^2.$$

$$\text{Ответ. } M\xi_t(\omega) = 6t - 4t^2.$$

**!Task5**

Найти математическое ожидание случайного процесса

$$\xi_t(\omega) = 3t\xi_1 - 4t\xi_2 + 3t^2, \text{ если}$$

$\xi_1, \xi_2$  стохастически независимые случайные величины с известными числовыми характеристиками

-

$$M\xi_1 = -3, D\xi_1 = 2, M\xi_2 = 1, D\xi_2 = 2, t > 0.$$

$\xi_1, \xi_2$  - случайные величины с

$$M\xi_1 = 8, D\xi_1 = 1, M\xi_2 = 2, D\xi_2 = 4, \rho(\xi_1, \xi_2) = 0, t > 0.$$

Варианты ответа:

$$1. M\xi_t(\omega) = -13t + 3t^2.$$

$$2. M\xi_t(\omega) = -t + t^2.$$

$$3. M\xi_t(\omega) = -13t.$$

**РЕШЕНИЕ.** Математическое ожидание случайного процесса находится как математическое ожидание случайной величины

$$M\xi_t(\omega) = M(3t\xi_1 - 4t\xi_2 + 3t^2) = 3tM\xi_1 - 4tM\xi_2 + 3t^2 = 3t \cdot (-3) - 4t \cdot 1 + 3t^2 = -13t + 3t^2.$$

Ответ.  $M\xi_t(\omega) = -13t + 3t^2$ .

**Задания открытого типа (короткий текст): !Task6-10**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**!Task6** Вставьте пропущенное слово или закончите определение

Случайный процесс  $\xi_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega, t \in T$ , для которого при  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  случайные величины

$(\xi_{t_2} - \xi_{t_1}), (\xi_{t_3} - \xi_{t_2}), \dots, (\xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}})$  стохастически независимы, называется случайным процессом с независимыми .....

**!Ответ**

приращениями

приращением

**!Task7**

Случайный процесс  $\xi_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega, t \in T$ , для которого при  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  случайные величины

$\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}$  стохастически независимы, называется случайным процессом с независимыми .....

**!Ответ**

значениями



значением

**!Task8**

Случайный процесс  $\xi_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega, t \in T$  называется ....., если все его конечномерные распределения нормальные.

**!Ответ**

гауссовским

гауссовым

**!Task9** Если для случайного процесса  $\xi_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega, t \in T$  зафиксировано  $\omega \in \Omega$ , то числовая функция аргумента  $t \in T$  называется .....

случайного процесса.

**!Ответ**

траекторией

или реализацией

**!Task9** Если для случайного процесса  $\xi_t(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega, t \in T$  зафиксировано  $t \in T$ , то случайная величина  $\xi_t(\bullet)$  называется ..... случайного процесса.

**!Ответ**

значением

или сечением

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**

**ЛИСТ СОГЛАСОВАНИЙ****РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Специальность: 01.05.01 Фундаментальная математика и механика

Дисциплина: Б.О.23 Теория случайных процессов

Профиль специализации: Современные методы теории функций в математике и механике.

Форма обучения: очная

Учебный год 2025/2026

---

---

Ответственный исполнитель

к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

Райхельгауз Л.Б.

\_\_\_.\_\_\_ 2023

СОГЛАСОВАНО

Куратор ООП ВПО

по направлению/ специальности

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_.\_\_\_ 2023

Зав.отделом обслуживания ЗНБ

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_.\_\_\_ 2023

---

---

РЕКОМЕНДОВАНА НМС математического факультета, протокол № 0500-03 от 25.05.2023